2. Скаларни производ и ортогоналност. Унитарни простори

Простори сусретани до сада били су *афини простори* (лат. *affinis* - међашњи, суседни). У њима се не могу дефинисати мерљиве величине као што су дужина и углови. Да би то могло бити учињено, биће уведен, по аналогији са тродимензионалним случајем, појам скаларног производа.

Дефиниција 2.1. Ако постоји правило помоћу кога се ма која два елемента $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ датог линеарног векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{F}$ повезују са скаларом $\langle v_1|v_2\rangle \in \mathbb{F}$, тај се број назива *скаларним производом* та два вектора, ако важи

1) $\langle v_1|v_2\rangle = \langle v_2|v_1\rangle^*$ - *ермитска симетрија*,

2) $\langle v_1 + v_2|v_3\rangle = \langle v_1|v_3\rangle + \langle v_2|v_3\rangle$ - *адитивност* у односу на сабирање по првом фактору,

3) $\langle \alpha v_1|v_2\rangle = \alpha^* \langle v_1|v_2\rangle$ - *антихомогеност* по првом фактору,

4) $\begin{array}{l} \langle v|v\rangle \geq 0, \ \ \forall |v\rangle \in \mathbb{V} \\ \langle v|v\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ |v\rangle = |0\rangle \end{array}$ - позитивна дефинитност (*строга позитивност*).

Дакле, скаларни производ је пример пресликавања које подсећа на бинарну операцију, али он то ипак није, будући да резултат не припада векторском простору из кога потичу вектори који се њиме доводе у везу, већ пољу над којим је дефинисан поменути векторски простор.

Из аксиома 1 и аксиома 3 очигледно следи *хомогеност* по другом фактору

$$\langle v_1|\alpha v_2\rangle = \langle \alpha v_2|v_1\rangle^* = \left[\alpha^* \langle v_2|v_1\rangle\right]^* = (\alpha^*)^* \langle v_2|v_1\rangle^* = \alpha \langle v_1|v_2\rangle .$$

Значи, скаларни производ у линеарном векторском простору $\mathbb{V}$ јесте свака ермитски симетрична, дистрибутивна у односу на сабирање, антихомогена по првом фактору, а хомогена по другом фактору и строго позитивна скаларна функција на $\mathbb{V}\times\mathbb{V}$[1].

Из аксиома 1 и аксиома 2 следи *адитивност* у односу на сабирање по другом фактору

$$\langle v_1 | v_2 + v_3 \rangle = \langle v_2 + v_3 | v_1 \rangle^* = \langle v_2 | v_1 \rangle^* + \langle v_3 | v_1 \rangle^* = \langle v_1 | v_2 \rangle + \langle v_1 | v_3 \rangle \,.$$

Примедба: Више се не користе специјалне ознаке за сабирање у простору $\mathbb{V}$, јер је, прво, тако једноставније што се писања тиче и, друго, већ је јасно да истим ознакама могу представљати различите операције.

У математичкој литератури постулира се *антихомогеност* по **другом** фактору, али у физици увек важи аксиом 3 због Дираковe нотације (више о њој у **поглављу 10**).

Линеарни векторски простори у којима је уведен скаларни производ називају се *унитарни простори* $\mathbb{U}$. Ако се укаже потреба биће разликовани коначно-димензионални $\mathbb{U}^n$ (n - број димензија) од бесконачно-димензионалних унитарних простора (који ће увек бити *Хилбертови простори* $\mathbb{H}$ - **поглавље 4**). Специјално, реални коначно-димензионални простори са скаларним производом називају се *еуклидским просторима* $\mathbb{E}^n$.

Настављајући даље аналогију са тродимензионалним случајем, биће уведено уопштење *норме* вектора $|v\rangle \in \mathbb{V}$.

[1] У реалном линеарном векторском простору $\mathbb{V}(\mathbb{R})$ скаларни производ је свака симетрична, дистрибутивна, хомогена по оба фактора и строго позитивна скаларна функција.

Дефиниција 2.2. Ако се сваком елементу $|v\rangle$ линеарног векторског простора $\mathbb{V}(\mathbb{F})$ може једнозначно придружити број $\||v\rangle\|$ који задовољава следеће аксиоме

1) $$\begin{aligned}&\||v\rangle\| \geq 0,\ \forall |v\rangle \in \mathbb{V}\\ &\||v\rangle\| = 0 \Leftrightarrow |v\rangle = |0\rangle\end{aligned}$$ - *ненегативност*

2) $\|\alpha|v\rangle\| = |\alpha|\,\||v\rangle\|$ - *хомогеност*

3) $\||v_1 + v_2\rangle\| \leq \||v_1\rangle\| + \||v_2\rangle\|$ - *релација троугла*

каже се да је поменути број *норма* вектора $|v\rangle$.

У унитарним просторима $\mathbb{U}$ норму је могуће дефинисати уз помоћ скаларног производа, што се назива нормом која извире из скаларног производа

$$\||v\rangle\| = \sqrt{\langle v|v\rangle},$$

за коју важе аксиоми из **дефиниције 2.2**.

1. први аксиом следи из дефиниције скаларног производа;

2. $\langle \alpha v|\alpha v\rangle = \alpha\,\alpha^* \langle v|v\rangle = |\alpha|^2 \||v\rangle\|^2 \Rightarrow \|\alpha|v\rangle\|^2 = |\alpha|^2 \||v\rangle\|^2$, следи други аксиом;

3. Прво се мора доказати неједнакост Коши-Буњаковски-Шварца (*Cauchy-Bunjakovsky-Schwarz*)

$$|\langle v_1|v_2\rangle|^2 \leq \langle v_1|v_1\rangle\langle v_2|v_2\rangle\,. \tag{2.1}$$

Наиме, ако се формира скаларни производ вектора $|v_1\rangle + \mu\langle v_2|v_1\rangle|v_2\rangle$ са самим собом, где је μ реални скаларни параметар, добија се

$$\big\langle \langle v_1| + \mu\langle v_2|v_1\rangle\langle v_2| \big| |v_1\rangle + \mu\langle v_2|v_1\rangle|v_2\rangle \big\rangle \geq 0\,,$$

односно

$$\langle v_1|v_1\rangle + \mu\langle v_2|v_1\rangle^* \langle v_2|v_1\rangle + \mu\langle v_2|v_1\rangle\langle v_1|v_2\rangle + \mu^2 \langle v_2|v_1\rangle^* \langle v_2|v_1\rangle\langle v_2|v_2\rangle \geq 0\,,$$

илити

$$\langle v_1|v_1\rangle+\mu\langle v_1|v_2\rangle\langle v_1|v_2\rangle^*+\mu\langle v_1|v_2\rangle^*\langle v_1|v_2\rangle+\mu^2\langle v_1|v_2\rangle\langle v_1|v_2\rangle^*\langle v_2|v_2\rangle\geq 0\,,$$

одакле следи

$$\langle v_1|v_1\rangle+2\mu\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2+\mu^2\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2\langle v_2|v_2\rangle\geq 0\,,$$

а онда, преписано у облику квадратног тринома по μ ($a\mu^2+b\mu+c$)

$$\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2\langle v_2|v_2\rangle\,\mu^2+2\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2\mu+\langle v_1|v_1\rangle\geq 0\,,$$

који, будући ненегативан, мора имати дискриминанту ($\sqrt{b^2-4ac}$) која не може бити већа од нуле[2]

$$\sqrt{4\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^4-4\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2\langle v_1|v_1\rangle\langle v_2|v_2\rangle}\leq 0\,,$$

то јест

$$\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^4\leq\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|^2\langle v_1|v_1\rangle\langle v_2|v_2\rangle,$$

што, након одговарајућег скраћења, представља управо Коши-Буњаковски-Шварцову неједнакост (2.1). Сада је омогућено доказивање *неједнакости Минковског*

$$\sqrt{\langle v_1+v_2|v_1+v_2\rangle}\leq\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}+\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle} \tag{2.2}$$

Почиње се формирањем скаларног производа вектора $|v_1+v_2\rangle$ са самим собом

$$\begin{aligned}\langle v_1+v_2|v_1+v_2\rangle&=\langle v_1|v_1+v_2\rangle+\langle v_2|v_1+v_2\rangle\\&=\langle v_1|v_1\rangle+\langle v_1|v_2\rangle+\langle v_2|v_1\rangle+\langle v_2|v_2\rangle\\&=\langle v_1|v_1\rangle+\langle v_1|v_2\rangle+\langle v_1|v_2\rangle^*+\langle v_2|v_2\rangle\\&=\langle v_1|v_1\rangle+2\,\mathrm{Re}\langle v_1|v_2\rangle+\langle v_2|v_2\rangle\\&\leq\langle v_1|v_1\rangle+2\left|\langle v_1|v_2\rangle\right|+\langle v_2|v_2\rangle\end{aligned}$$

[2] Квадратни трином може имати само једно реално (када важи једнакост) или два имагинарна решења.

Ако се сада примени Коши-Буњаковски-Шварцова неједнакост (2.1) на средњи фактор у горњем изразу, следи

$$\langle v_1+v_2|v_1+v_2\rangle \leq \langle v_1|v_1\rangle + 2\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle}\sqrt{\langle v_2|v_2\rangle} + \langle v_2|v_2\rangle,$$

илити

$$\langle v_1+v_2|v_1+v_2\rangle \leq \left[\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} + \sqrt{\langle v_2|v_2\rangle}\right]^2,$$

односно (2.2) или, што је исто, релација троугла (аксиом 3)

$$\| |v_1+v_2\rangle \| \leq \| |v_1\rangle \| + \| |v_2\rangle \|.$$

Пример 2.2.1. Класични вектори

$$\vec{v}_1 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}_2 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3,$$

где је коришћено уобичајено означавање вектора стрелицама, док су њихове компоненте написане у облику уређене тројке, премда се, наравно, могу представити и у облику матрица-колона.

Скаларни производ наведених вектора је

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i,$$

а норме (дужине) оба вектора дате су изразима

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot v_1} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \xi_i^2}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{\vec{v}_2 \cdot v_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \eta_i^2}.$$

Пример 2.2.2. У случају простора $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^{n1}$, скаларни производ гласи

$$\langle v_1|v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$

док су норме (дужине) оба вектора

$$\| |v_1\rangle \| = \sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}, \quad \| |v_2\rangle \| = \sqrt{\langle v_2|v_2\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2}.$$

Нажалост, у случају простора $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}^{n1}$, проста примена истог правила давала би комплексну норму, стога се скаларни производ дефинише на следећи начин

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i \text{ , односно } \langle v_1 | v_2 \rangle = v_1^\dagger v_2 . \tag{2.3}$$

Овде је коришћена ознака $\dagger$ (изнад матрице-колоне v_1) за унарну операцију која преводи матрицу-колону у њој *транспоновану* матрицу-врсту са комплексно коњугованим матричним елементима; та унарна операција зове се *адјунговање* (видети **поглавље 7**). Ако се на овако написане матрице примени правило матричног множења, добија се управо сума из првог израза.

У том случају норме оба вектора гласе

$$\| |v_1\rangle \| = \sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \geq 0 , \quad \| |v_2\rangle \| = \sqrt{\langle v_2 | v_2 \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2} \geq 0 ,$$

јер су увек $|\xi_i|^2 \geq 0$, $|\eta_i|^2 \geq 0$.

На овом примеру јасно се види зашто је било неопходно постулирати аксиом 1 ермитске симетрије у дефиницији скаларног производа.

Пример 2.2.3. У простору $\mathbb{C}[a,b]$ један скаларни производ дат је са

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \int_a^b v_1^*(t)\, v_2(t)\, \mathrm{d}t , \quad v_1(t), v_2(t) \in \mathbb{C}[a,b] .$$

Пример 2.2.4. У простору $\mathbb{C}^{mn}$ скаларни производ дефинише се изразом

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \mathrm{Tr}(v_1^\dagger v_2) ,$$

где је опет реч о унарној операцији *адјунговања* $\dagger$ која претвара полазну матрицу у њој транспоновану матрицу, са комплексно коњугованим матричним елементима; Tr је ознака за *траг* матрице, једнак суми свих матричних елемената који се налазе на главној дијагонали резултујуће матрице.

Дефиниција 2.3. Вектори $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ произвољног унитарног простора $\mathbb{U}$ *ортогонални* су ако је $\langle v_1|v_2\rangle = 0$.

Очигледно је да је нулти елемент $|0\rangle$ ортогоналан на све елементе унитарног простора $\mathbb{U}$.

Дефиниција 2.4. Скуп вектора $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1,n}\}$ *ортонормиран* је ако важи израз

$$\langle \mathrm{e}_i | \mathrm{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

где је симбол са десне стране *Кронекерово* (*Kronecker*) *делта*, дефинисано као

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Сваки ортонормирани скуп вектора јесте линеарно независан.

Доказ.

Нека је $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1,n}\}$ дати ортонормирани скуп. Тада из формуле (1.5)

$$\sum_i \alpha_i |\mathrm{e}_i\rangle = |0\rangle$$

следи да је: $\alpha_i = 0$.

Заиста

$$0 = \langle \mathrm{e}_j | 0 \rangle = \langle \mathrm{e}_j | \sum_i \alpha_i |\mathrm{e}_i\rangle = \sum_i \alpha_i \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_i \rangle = \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j,$$

односно, како је, с друге стране

$$\langle \mathrm{e}_j | \sum_i \alpha_i |\mathrm{e}_i\rangle = \langle \mathrm{e}_j | 0 \rangle = 0,$$

јасно је да је

$$\alpha_i = 0, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Q.E.D.

Следећа теорема неопходна за даљи рад јесте теорема о Беселовој (*Bessel*) неједнакости.

Теорема 2.2. Нека је $\left\{|\mathrm{e}_i\rangle : i=\overline{1,n}\right\}$ дати ортонормирани скуп вектора, а $|v\rangle$ произвољни вектор из коначно-димензионалног унитарног простора (КДУП) $\mathbb{U}^n$; онда

i) важи *Беселова неједнакост*

$$\left\||v\rangle\right\|^2 \geq \sum_i \left|\langle \mathrm{e}_i|v\rangle\right|^2$$

ii) вектор $|v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$ ортогоналан је на сваки вектор из скупа $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$

$$\left\langle \langle v| - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle \langle \mathrm{e}_i| \,\middle|\, |\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle = 0\,,\ \forall j=\overline{1,n}\,.$$

Доказ.

i) Ако се вектор $|v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$ скаларно помножи са самим собом, биће

$$\left\langle |v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle |\mathrm{e}_i\rangle \,\middle|\, |v\rangle - \sum_j \langle \mathrm{e}_j|v\rangle |\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle \geq 0$$

односно

$$\langle v|v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle^* \langle \mathrm{e}_i|v\rangle - \sum_j \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \langle v|\mathrm{e}_j\rangle + \sum_i \sum_j \langle \mathrm{e}_i|v\rangle^* \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_j\rangle \geq 0$$

илити

$$\left\||v\rangle\right\|^2 - \sum_i \left|\langle \mathrm{e}_i|v\rangle\right|^2 - \sum_j \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \langle v|\mathrm{e}_j\rangle + \sum_i \sum_j \langle \mathrm{e}_i|v\rangle^* \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \delta_{ij} \geq 0$$

то јест[3]

$$\left\||v\rangle\right\|^2 - \sum_i \left|\langle \mathrm{e}_i|v\rangle\right|^2 - \sum_j \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \langle v|\mathrm{e}_j\rangle + \sum_j \langle \mathrm{e}_j|v\rangle^* \langle \mathrm{e}_j|v\rangle \geq 0\,.$$

---

[3] Како је $\langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}$, из **дефиниције 2.4.** за Кронекерово делта следи да двострука сума прелази у једноструку.

Како су трећи и четврти члан једнаки, а супротног предзнака, они се узајамно потиру, те следи

$$\left\| |v\rangle \right\|^2 \geq \sum_i \left| \langle \mathrm{e}_i | v \rangle \right|^2 . \tag{2.5}$$

ii) Скаларни производ вектора $|v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i | v \rangle |\mathrm{e}_i\rangle$ и вектора $|\mathrm{e}_j\rangle$ из скупа

$$\begin{aligned}\Big\langle \langle v| - \sum_i \langle \mathrm{e}_i | v \rangle \langle \mathrm{e}_i | \Big| |\mathrm{e}_j\rangle \Big\rangle &= \langle v | \mathrm{e}_j \rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i | v \rangle^* \langle \mathrm{e}_i | \mathrm{e}_j \rangle \\ &= \langle v | \mathrm{e}_j \rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i | v \rangle^* \delta_{ij} \qquad . \\ &= \langle v | \mathrm{e}_j \rangle - \langle \mathrm{e}_j | v \rangle^* = 0\end{aligned}$$

Q.E.D.

У **теореми 2.1.** било је показано да је сваки ортонормирани скуп линеарно независан. Како је сваки линеарно независан скуп вектора који образује простор $\mathbb{U}$ базис простора, онда је и сваки ортонормирани скуп који образује простор $\mathbb{U}$ такође базис тог простора.

Теорема 2.3. Ако је $\left\{ |\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1, n} \right\}$ ортонормиран скуп вектора из КДУП $\mathbb{U}^n$, он ће *образовати* тај простор, тј. биће *базис* простора $\mathbb{U}^n$ ако је задовољен један од пет еквивалентних услова

(1) Нека је $|v\rangle \in \mathbb{U}^n$, онда важи израз

$$|v\rangle = \sum_i \langle \mathrm{e}_i | v \rangle |\mathrm{e}_i\rangle \tag{2.6}$$

где је $\langle \mathrm{e}_i | v \rangle = \xi_i$ Фуријеов коефицијент, док је $\langle \mathrm{e}_i | v \rangle |\mathrm{e}_i\rangle$ пројекција вектора $|v\rangle$ дуж орта $|\mathrm{e}_i\rangle$; читав развој (2.6) назива се *Фуријеовим развојем*.

(2) Нека је $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{U}^n$, тада важи *Парсевалова* (Parseval) *једнакост*

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \sum_i \xi_i^* \eta_i = \sum_i \langle v_1 | \mathrm{e}_i \rangle \langle \mathrm{e}_i | v_2 \rangle \tag{2.7}$$

где је $\xi_i = \langle \mathrm{e}_i | v_1 \rangle$ и $\eta_i = \langle \mathrm{e}_i | v_2 \rangle$.

(3) Нека је $|v\rangle \in \mathbb{U}^n$, онда *Беселова неједнакост* постаје једнакост

$$\| |v\rangle \|^2 = \sum_i |\langle \mathrm{e}_i | v \rangle|^2 . \tag{2.8}$$

(4) Скуп $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1, n}\}$ није део неког већег ортонормираног скупа, односно он је *потпун ортонормиран скуп*.

(5) Ако и само ако је једино нулти вектор $|0\rangle$ ортогоналан на све векторе из скупа $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1, n}\}$.

Доказ.

Нека (O) значи *образујући ортонормиран скуп*.

Тада важи: $(\mathrm{O}) \Leftrightarrow (1) \wedge (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (1)$.

Заиста

$(\mathrm{O}) \Leftrightarrow (1)$: Како је $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1, n}\}$ *образујући* скуп биће, $\forall |v\rangle \in \mathbb{U}^n$

$$|v\rangle = \sum_i \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle . \tag{2.9}$$

Након скаларног множења формуле (2.9) слева са $|\mathrm{e}_j\rangle$, биће

$$\langle \mathrm{e}_j | v \rangle = \sum_i \xi_i \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_i \rangle = \sum_i \xi_i \, \delta_{ij} = \xi_j .$$

Последњи корак последица је дефиниционе карактеристике ортонормираног скупа да је $\langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_i \rangle = \delta_{ij}$, а онда и особине Кронекеровог делта да »скида« суму.

$(1) \Rightarrow (2)$: Нека је $|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |\mathrm{e}_i\rangle$ и $|v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |\mathrm{e}_i\rangle$. Њихов скаларни производ је

$$\langle v_1|v_2\rangle = \left\langle \sum_i \xi_i|\mathrm{e}_i\rangle \middle| \sum_j \eta_j|\mathrm{e}_j\rangle \right\rangle = \sum_i\sum_j \xi_i^*\eta_j\langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_j\rangle = \sum_i \xi_i^*\eta_i = \sum_i \langle v_1|\mathrm{e}_i\rangle\langle \mathrm{e}_i|v_2\rangle$$

што је управо формула (2.7).

$(2)\Rightarrow(3)$: Сменом $|v_2\rangle = |v_1\rangle$ у (2.7) добија се

$$\langle v_1|v_1\rangle \equiv \||v_1\rangle\|^2 = \sum_i \langle v_1|\mathrm{e}_i\rangle\langle \mathrm{e}_i|v_1\rangle = \sum_i \langle v_1|\mathrm{e}_i\rangle\langle v_1|\mathrm{e}_i\rangle^* = \sum_i |\langle v_1|\mathrm{e}_i\rangle|^2 .$$

$(3)\Rightarrow(4)$ односно $\neg(4)\Rightarrow\neg(3)$ ($\neg$ је ознака за негацију става, те је према математичкој логици друга релација еквивалентна првој):

Нека је скуп $\{|\mathrm{e}_i\rangle : i=\overline{1,n}\}$ садржан у неком већем ортонормираном скупу, што је $\neg(4)$. Тада би постојао вектор $|\mathrm{e}_{n+1}\rangle$ такав да је $\||\mathrm{e}_{n+1}\rangle\|^2 = 1$ и $\langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_{n+1}\rangle = 0$ за свако $i=\overline{1,n}$, те би било

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_{n+1}\rangle|^2 = 0 ,$$

односно

$$\||\mathrm{e}_{n+1}\rangle\|^2 \neq \sum_{i=1}^{n} |\langle \mathrm{e}_i|\mathrm{e}_{n+1}\rangle|^2 ,$$

а то је управо $\neg(3)$.

$(4)\Rightarrow(5)$, односно $\neg(5)\Rightarrow\neg(4)$: У случају $\neg(5)$, то би значило да постоји вектор $|v\rangle \neq |0\rangle$ такав да је $\langle \mathrm{e}_i|v\rangle = 0$ за свако $i=\overline{1,n}$. Тада би било могуће додати нормиран вектор $|v\rangle/\||v\rangle\|$ датом скупу, чиме би он био проширен, што би била $\neg(4)$.

$(5)\Rightarrow(1)$, односно $\neg(1)\Rightarrow\neg(5)$: У случају $\neg(1)$, то би значило да постоји барем један вектор $|v\rangle \in \mathbb{U}^n$ за који је увек $|v\rangle \neq \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle|\mathrm{e}_i\rangle$, илити $|v\rangle - \sum_i \langle \mathrm{e}_i|v\rangle|\mathrm{e}_i\rangle \neq |0\rangle$, који би, према **теореми 2.2**, био ортогоналан на све векторе из датог скупа, што би била $\neg(5)$.

Q.E.D.

Овде је показано да ова, једна од кључних теорема у теорији унитарних простора, важи само у случају КДУП; у **поглављу 4** биће показано да она важи и у случају Хилбертових простора.

2.1. Грам-Шмитов поступак ортонормирања

Сада ће бити показано да се у унитарним просторима може ортонормирати било који линеарно независан скуп (и то у оба случаја: коначно-димензионалном и бесконачно-димензионалном). Тиме се омогућава да се у раду користе искључиво ортонормирани базиси, које је могуће добити *Грам-Шмитовим* (*Gramm-Schmidt*) *поступком ортонормирања*.

Нека је $\left\{|v_i\rangle : i=\overline{1,n}\right\}$ произвољан базис у коначно-димензионалном простору $\mathbb{U}^n$, што значи да ниједан његов вектор није нулти вектор. Стога се први вектор датог скупа може поделити својом нормом

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \frac{|v_1\rangle}{\left\||v_1\rangle\right\|}$$

чиме је добијен први вектор ортонормираног скупа (који је, наравно, за сада само нормиран). Потом се други вектор обликује на следећи начин

$$|v_2'\rangle = |v_2\rangle - \alpha_1|\mathrm{e}_1\rangle \neq 0,$$

а наметањем услова

$$\langle \mathrm{e}_1 | v_2' \rangle = 0$$

добија се

$$\langle \mathrm{e}_1 | v_2\rangle - \alpha_1 \langle \mathrm{e}_1 | \mathrm{e}_1 \rangle = 0$$

одакле је

$$\alpha_1 = \langle \mathrm{e}_1 | v_2 \rangle$$

односно

$$| v_2' \rangle = | v_2 \rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_2 \rangle | \mathrm{e}_1 \rangle .$$

Коначно, дељењем овако добијеног вектора с његовом нормом, следи

$$| \mathrm{e}_2 \rangle = \frac{| v_2' \rangle}{\| | v_2' \rangle \|} = \frac{| v_2 \rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_2 \rangle | \mathrm{e}_1 \rangle}{\| | v_2 \rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_2 \rangle | \mathrm{e}_1 \rangle \|},$$

што је уствари други вектор, *нормиран* и *ортогоналан* на први, у претходном кораку већ нормирани, вектор $| \mathrm{e}_1 \rangle$.

Сада се, по правилу математичке индукције, претпоставља да су првих m вектора $\{ | \mathrm{e}_i \rangle : i = \overline{1, m} \}$ ($m < n$) ортонормирани Грам-Шмитовим поступком, а онда треба показати да је могуће ортонормирати и $(m+1)-$ви вектор

$$| v_{m+1}' \rangle = | v_{m+1} \rangle - \left(\alpha_1 | \mathrm{e}_1 \rangle + \ldots + \alpha_m | \mathrm{e}_m \rangle \right) \neq | 0 \rangle . \tag{2.10}$$

Након скаларног множења формуле (2.10) слева вектором $| \mathrm{e}_j \rangle$, $j = \overline{1, m}$, уз услов да скаларни производ буде нула (скаларни производ вектора $| \mathrm{e}_j \rangle$ са било којим другим вектором из скупа $\{ | \mathrm{e}_i \rangle : i = \overline{1, m} \}$, сем са самим собом, мора бити једнак нули), следи

$$\langle \mathrm{e}_j | v_{m+1}' \rangle = 0 = \langle \mathrm{e}_j | v_{m+1} \rangle - 0 \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_1 \rangle - \ldots - \alpha_j \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_j \rangle - \quad - 0 \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_m \rangle .$$

Даље је, очигледно,

$$\alpha_j = \langle \mathrm{e}_j | v_{m+1} \rangle, \ j = \overline{1, m}$$

што даје

$$|\mathrm{e}_{m+1}\rangle = \frac{|v'_{m+1}\rangle}{\left\| |v'_{m+1}\rangle \right\|} = \frac{|v_{m+1}\rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_{m+1}\rangle |\mathrm{e}_1\rangle - \ldots - \langle \mathrm{e}_m | v_{m+1}\rangle |\mathrm{e}_m\rangle}{\left\| |v_{m+1}\rangle - \langle \mathrm{e}_1 | v_{m+1}\rangle |\mathrm{e}_1\rangle - \ldots - \langle \mathrm{e}_m | v_{m+1}\rangle |\mathrm{e}_m\rangle \right\|}. \quad (2.11)$$

Понављањем наведеног поступка $n-$пута од произвољног базиса $\left\{ |v_i\rangle : i = \overline{1, n} \right\}$ добија се ортонормиран базис $\left\{ |\mathrm{e}_i\rangle : i = \overline{1, n} \right\}$.

Грам-Шмитов поступак примењује се и када је векторски простор бесконачно-димензионалан, али тако да се на основу $n-$тог ортонормираног вектора одређују сви остали.